V σύνολο $\oplus, \odot$ πράξεις

$\oplus \quad V \times V \to$

$(u,v) \to u \oplus v$

$\odot \quad \mathbb{R} \times V \to V$

$(r,u) \to r \odot u$

$(V, \oplus)$ αβελιανή ομάδα

4 ιδιότητες:

5) $r \odot (u \oplus v) = r \odot u \oplus r \odot v$

6) $(r + r') \odot u = r \odot u \oplus r' \odot u$

7) $(r r') \odot u = r \odot (r' \odot u)$

8) $1 \odot u = u$

π.χ. $V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση $\}$

$(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$

$(r \odot f)(x) = r f(x)$

$V = \delta x$

Το ουδέτερο στοιχείο της $\oplus$ είναι η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2) $C = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής $\}$ με τις ίδιες πράξεις

$\sigma/\sigma + \sigma/\sigma = \sigma/\sigma$

$\sigma/\sigma +$ αριθμός $= \sigma/\sigma$

α) Εξετάζω αν οι πράξεις είναι καλά ορισμένες

β) Τις 8 ιδιότητες

3) $V=\{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ σ/ς$\}$

Η ⊕ δεν είναι καλά ορισμένη

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{για } x\neq 0 \text{ το σ/ς}\\ 0 & \text{για } x=0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{για } x\neq 0 \text{ το σ/ς}\\ 1 & \text{για } x=0\end{cases}$$

$(f+g)(x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$ σ/ς

Η πράξη δεν είναι καλά ορισμένη

$\mathbb{R}_1[x]=\{ax+b \mid a,b\in\mathbb{R},\ x$ μεταβλητή$\}$ πρωτοβάθμια πολυώνυμα

με πράξεις

$(f+g)(x)=(ax+b)+(a'x+b')=(a+a'x)+(b+b')$

$rf(x)=r(ax+b)=(ra)x+rb$

$x+(-x)=0x+0\in\mathbb{R}_1[x]$

$\mathbb{R}_1[x]$ είναι δ.χ.

$\mathbb{R}_2[x]$

$\mathbb{R}_3[x]$

$\mathbb{R}_n[x]=\{a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{R}\}$ με τις πράξεις.

$(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\dots+b_nx^n)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n$

r' γινόμενο.

$r(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)=ra_0+ra_1x+\dots+ra_nx^n$ είναι δ.χ.

$\mathbb{R}_\infty[x]=\{$όλα τα πολυώνυμα$\}$ Ένα πολυώνυμο έχει πεπερασμένο βαθμό, όχι άπειρο

δεν χρειάζεται

$\mathbb{R}_0[x]\subseteq\mathbb{R}_1[x]\subseteq\mathbb{R}_2[x]\subseteq\dots\subseteq\mathbb{R}_n[x]\subseteq\dots\subseteq\mathbb{R}[x]$

Θεώρημα: Έστω V δ.χ. Τότε ισχύουν:

(i) Το ουδέτερο (μηδενικό διάνυσμα) στοιχείο της ⊕ είναι μοναδικό

(ii) Το αντίθετο στοιχείο της ⊕ είναι μοναδικό

(iii) Αν $u+v=u+w$, τότε $v=w$

(iv) $-(-u)=u$

(ω) $0 \odot \upsilon = \bar{0}$ μηδενικό διάνυσμα = ουδέτερο στοιχείο.

(ωί) $-(r \odot \upsilon) = (-r) \odot \upsilon = r \odot (-\upsilon)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $(V, \oplus, \odot)$ ένας δ.χ κ' $W \subseteq V$ μη-κενό. Τότε το W θα καλείται υπόχωρος του V κ' θα γράφουμε $W \leq V$ αν το $(W, \oplus, \odot)$ είναι από μόνο του δ.χ.

π.χ. $\mathbb{R}_0[x] \leq \mathbb{R}_1[x] \leq \mathbb{R}_2[x] \leq \ldots \leq \mathbb{R}_n[x]$.

π.χ Να βρεθούν οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ με τις κανονικές πράξεις.

$(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$

$r \odot (x,y) = (rx, ry)$

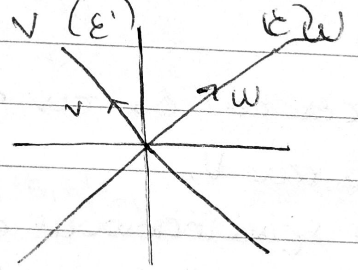
(1) Το $\mathbb{R}^2 \leq \mathbb{R}^2$ ο εαυτός του

(2) $W = \{ r\upsilon \mid r \in \mathbb{R}, \upsilon = (x_0, y_0) \} = \{ (rx_0, ry_0) \mid r \in \mathbb{R} \}$

·Όλες οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από την αρχή των αξόνων

(3) $\{(0,0)\} \leq \mathbb{R}^2$

Η ένωση δχ δεν είναι δχ



$W \cup V \not\leq \mathbb{R}^2$

(ε): tw $\quad W \leq \mathbb{R}^2$

(ε'): rv $\quad V' \leq \mathbb{R}^2$

$W + V = \{ \alpha w + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \} \leq \mathbb{R}^2$

$v' + w' = \upsilon \Rightarrow \upsilon \in W+V \Rightarrow \mathbb{R}^2 \subseteq W+V$

$W + V \subseteq \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2 = W + V$

Πρόταση: (i) Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^2$ είναι ο τετριμμένος $\{\overset{\text{dim}0}{(0,0)}\}$, οι $\overset{\text{dim}1}{\text{ευθείες}}$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων κ' ο $\mathbb{R}^2$ dim 2

(ii) Οι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ είναι ο τετριμμένος $\{\overset{\text{dim}0}{(0,0,0)}\}$, οι $\overset{\text{dim}1}{\text{ευθείες}}$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων, τα $\overset{\text{dim}2}{\text{επίπεδα}}$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων κ' ο $\mathbb{R}^3$

Πρόταση: Έστω $(V,\oplus,\odot)$ ένας δ.χ. κ' $W\subseteq V$ μη κενό υποσύνολο.
Το W είναι υπόχωρος του V ανν ισχύουν οι δύο επόμενες ιδιότητες
(i) ανν $u,v\in W \Rightarrow u\oplus v\in W$
(ii) ανν $u\in W$ κ' $r\in\mathbb{R} \Rightarrow r\odot u\in W$
(ΠΡΟΣΟΧΗ: Το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο W)

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Έστω $W\leq V$.
Αφού $W\leq V$ προφανώς το άθροισμα στοιχείων του θα είναι επίσης στοιχείο του κ' το γινόμενο αριθμού με στοιχείο του θα είναι επίσης στοιχείο του.

"$\Leftarrow$" Οι δύο ιδιότητες (i) κ' (ii) δηλώνουν ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες στο W.
Οι 8 ιδιότητες του δχ τις οποίες πρέπει να εξετάσουμε για τον W ισχύουν σίγουρα στον V.
Αλλά εφόσον χρησιμοποιούμε στοιχεία του W κ' οι πράξεις μας είναι στοιχεία του W, οι 8 ιδιότητες θα ισχύουν κ' στον W.
Ας δούμε την επιμεριστική: ισχύει στον V

$$r\odot(\underbrace{u\oplus u'}_{\in W \text{ (i)}})=r\odot u\oplus r\odot u' \quad \text{με } r\in\mathbb{R},\ u,u'\in W$$

$r\odot u \in W$ (ii), $r\odot u' \in W$ (ii)

$r\odot(u\oplus u') \in W$ (ii), $r\odot u\oplus r\odot u' \in W$ (i)

Άρα κ' στον W

π.χ. Στο σχ. $\mathbb{R}^3$ δίνεται το υποσύνολο $W=\{\kappa(1,1,1) + \lambda(0,2,3) \mid \kappa,\lambda\in\mathbb{R}\}$

Ν.δ.ο. ότι $W \leq \mathbb{R}^3$ κ' αποτελεί επίπεδο

Λύση: Θα ελέγξουμε τις δύο ιδιότητες του υπόχωρου $(0,0,0)\in W$

$(\kappa(1,1,1)+\lambda(0,2,3)) + (\kappa'(1,1,1)+\lambda'(0,2,3)) = (\kappa+\kappa')(1,1,1)+(\lambda+\lambda')(0,2,3)\in W$

$r(\kappa(1,1,1)+\lambda(0,2,3)) = r\kappa(1,1,1) + r\lambda(0,2,3)\in W$

Περιγράφουμε το τυχαίο στοιχείο του W

$(x,y,z) = \kappa(1,1,1) + \lambda(0,2,3)$

$x = \kappa\cdot 1 + \lambda\cdot 0 \Rightarrow \kappa = x$

$y = \kappa\cdot 1 + \lambda\cdot 2 \Rightarrow \lambda = \frac{y-x}{2}$

$z = \kappa\cdot 1 + \lambda\cdot 3$

$z = x + \frac{y-x}{2}\cdot 3 \Rightarrow \boxed{-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}y - z = 0}$ Εξίσωση επιπέδου